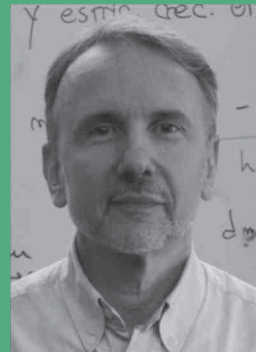

Joaquim Ortega Cerdà nació en Barcelona en 1968 y se doctoró en Matemáticas en la Universitat Autònoma de Barcelona en 1994. Sus intereses en investigación son el Análisis Complejo en una y varias variables y el análisis armónico. En la actualidad es profesor del Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi de la Universitat de Barcelona. Está integrado en el grupo de Teoría de Funciones UAB/UB. Actualmente está desarrollando una línea de investigación sobre los fundamentos matemáticos de la teoría de la señal.

Roberto Scotto nació en San Martín de las Escobas en 1957 y se doctoró en Matemáticas en la Universidad de Minnesota en 1993.
Su interés en investigación es el análisis armónico, especialmente el análisis armónico asociado a polinomios ortogonales.
En la actualidad es profesor del Departamento de Matemática de la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Nacional del Litoral e investigador externo del IMAL-CONICET. Forma parte del grupo CAI+D: Análisis armónico asociado a sistemas ortogonales cuya investigación está orientada al estudio del comportamiento de operadores funcionales que surgen de considerar expansiones ortogonales.

ISSN 2314-0992

Publicaciones del IMAL / Serie cursos / **Volumen 1** ◉ **Funciones de variable compleja: Una introducción** ◉ ***Joaquim Ortega-Cerdà/Roberto Scotto***

ISSN 2314-0992

Publicaciones del IMAL

Serie cursos

Volumen 1

Año 2012

Funciones de variable compleja

UNA INTRODUCCIÓN

Joaquim Ortega-Cerdà

Roberto Scotto

I M A L

UNL

CONICET

ISSN 2314-0992

Publicaciones del IMAL

Serie cursos

Volumen 1
Año 2012

Funciones de variable compleja
UNA INTRODUCCIÓN

Joaquim Ortega-Cerdà
Roberto Scotto

"**Publicaciones del IMAL**" comprende actualmente dos series de publicaciones y proyecta el lanzamiento de una nueva.

- **Preprints del IMAL** (http://www.imal.santafe-conicet.gov.ar/publicaciones/preprints) reúne las ediciones previas de trabajos de investigación que serán sometidos a referato en revistas de la disciplina.
- La **Serie Cursos** del IMAL publica libros en temas de grado avanzado y posgrado en Matemática en los que, además de la calidad científica de los contenidos, se ponga particular énfasis en la originalidad de la presentación.
- La **Serie Monografías**, que será lanzada próximamente, contendrá exposiciones de temas específicos de las áreas de investigación afines a las del IMAL, notas breves de cursos de posgrado avanzados, etc.

"**Publications of IMAL**" currently comprises two series of publications and projects the launch of a new.

- **Preprints of IMAL** (http://www.imal.santafe-conicet.gov.ar/publicaciones/preprints) comprises the previous editions of research papers to be submitted to refereed journals in the discipline.
- The **Courses series** of IMAL publishes books on topics of advanced graduate degree in mathematics in which, in addition to the scientific quality of the contents, particular emphasis is put on the originality of the presentation.
- The **Monographs series**, to be launched shortly, will contain presentations on specific topics of research areas related to those of IMAL, short notes of advanced graduate courses, etc.

ISSN 2314-0992

Propietario: Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas - CONICET (Instituto de Matemática Aplicada del Litoral - IMAL)

Publicaciones del IMAL: Serie Cursos
Instituto de Matemática Aplicada del Litoral, IMAL
CONICET-UNL
Güemes 3450,
S3000GLN Santa Fe, Argentina
Tel: (+54)-342-4559175, Int. 2161
Fax: (+54)-342-4550944
E-mail: imal@santafe-conicet.gov.ar
Sitio Web : http://www.imal.santafe-conicet.gov.ar

Prefacio de la Serie Cursos del IMAL

Con este volumen damos inicio a la publicación de la Serie Cursos del IMAL. Esta serie publica cursos específicos de matemática en los niveles de grado avanzado y posgrado, que contemplen modos expositivos novedosos, además de contenidos actualizados.

Sobre los autores de este primer volumen: el Dr. Joaquim Ortega-Cerdà es profesor de Matemática en el Departamento de Matemática Aplicada y Análisis de la Universidad de Barcelona, España. El Dr. Roberto Scotto es profesor de Matemática del Departamento de Matemática de la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Nacional del Litoral, e investigador externo del Instituto de Matemática Aplicada del Litoral IMAL en Santa Fe, Argentina.

Rubén D. Spies.
Santa Fe, octubre de 2012.

Se terminó de imprimir en Noviembre de 2012
en los talleres gráfico de la Unidad de Administración Territorial - UAT
Centro Científico Tecnológico - CONICET Santa Fe
Colectora Ruta Nac. 168. Paraje el Pozo. 3000 Santa Fe, Argentina
-PRIMERA EDICIÓN-

CONICET
SANTA FE

FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA
UNA INTRODUCCIÓN

Joaquim Ortega Cerdà – Roberto Scotto

Julio 2012

Prólogo

Este texto está basado en las notas que el primer autor redactó para el dictado de un curso cuatrimestral en la Facultat de Matemàtiques i Estadística de la Universitat Politècnica de Catalunya en el año 1996 y que posteriormente, ampliadas por el segundo autor, conformaron un curso de Variable Compleja impartido por éste en el año 2008 y destinado a los alumnos de la carrera de Licenciatura de Matemática de la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Nacional del Litoral.

Los resultados expuestos en este libro son bien conocidos y las demostraciones presentadas son similares a las desarrolladas en los textos clásicos. Sin embargo, en la presentación de los temas, se ha puesto especial énfasis en la representación integral de las funciones holomorfas como una herramienta fundamental para el estudio de sus propiedades. Este enfoque refleja no sólo los intereses y preferencias de los autores sino también las nuevas tendencias en el estudio de las funciones de variable compleja.

En el capítulo 1 se introduce el cuerpo de los números complejos y se estudian sus propiedades básicas. Asimismo se hace la identificación del plano complejo ampliado con la esfera de Riemann, la cual redunda en una mejor visualización del proceso de compatificación de Alexandroff. En estos contextos se estudia la noción de continuidad de las funciones complejas.

El capítulo 2 es central. Se define el concepto de $\mathbb{C}$-diferenciabilidad y se introduce la clase de las funciones holomorfas. Se destaca fuertemente el hecho de que, en virtud de la estructura de cuerpo del conjunto de los números complejos, la noción de derivada compleja sea esencialmente diferente de los conceptos de diferenciabilidad y regularidad estudiados en los cursos previos de funciones de varias variables reales. Las series de potencias resultan una ejemplificación clave de funciones analíticas y se consideran apropiadas para introducir las funciones trascendentes clásicas. El capítulo contiene además el estudio de las transformaciones conformes que permite describir los aspectos geométricos de las funciones analíticas.

En el capítulo 3 se introduce la teoría de la integración compleja. Se pone de manifiesto, en primer lugar, el hecho de que, en general, no es cierto que una función continua tenga necesariamente una primitiva y se demuestra que sólo las funciones holomorfas poseen primitivas locales. Se desarrolla una demostración de este resultado basada esencialmente en el teorema de Cauchy-Goursat sobre rectángulos. Asimismo se estudia la fórmula integral de Cauchy sobre un disco que resulta ser crucial para analizar no sólo la regularidad de las funciones analíticas sino también otras propiedades significativas de las mismas. En esta dirección el capítulo también contiene, a modo de síntesis, una caracterización de la pertenencia de una función a la clase de las funciones holomorfas que revela la íntima conexión entre las propiedades integrales y de analiticidad de las funciones complejas. El capítulo termina con el teorema de la aplicación abierta.

En el capítulo 4 se plantea el problema de caracterizar los dominios más generales que los discos en los cuales siga siendo cierto que una función holomorfa posea una primitiva. En este sentido se obtiene una respuesta positiva en términos de los dominios simplemente conexos. La demostración de este resultado se basa en la fórmula de representación de Cauchy-Pompieu que, siendo una generalización de la fórmula de Cauchy en el disco, resulta ser, ciertamente, muy útil. El capítulo también abarca el estudio de las singularidades aisladas de las funciones holmorfas y sus desarrollos de Laurent sobre anillos. En conexión con estos tópicos se incluyen el teorema de los residuos y sus aplicaciones. El capítulo finaliza con un resultado de densidad de las funciones racionales en el espacio de las funciones analíticas.

El capítulo 5 profundiza el estudio de las aplicaciones conformes. Se prueba el teorema de Riemann, que afirma que los dominios propios simplemente conexos son conformemente equivalentes al disco unitario. Asimismo se calcula el grupo de los automorfismos de diversos dominios.

Finalmente, en el capítulo 6 se aborda el estudio de las propiedades de las funciones armónicas en el plano, que están profundamente relacionadas con las propiedades de las funciones holomorfas estudiadas en el capítulo 3. En esta dirección se obtiene la llamada integral de Poisson que es una bonita fórmula de representación de las funciones armónicas en el disco, equivalente a la fórmula de Cauchy para funciones holomorfas. En este marco se resuelve el problema de Dirichlet en el disco.

Al final de cada capítulo se encuentra una serie de ejercicios cuya resolución redundará en una mejor comprensión de los resultados teóricos desarrollados.

A continuación queremos agradecer muy especialmente a Osvaldo Gorosito por leer detalladamente estas notas, por las discusiones fructíferas mantenidas con el segundo autor y por las correcciones sugeridas que sin lugar a dudas mejoraron notablemente la redacción de las mismas. Vaya también nuestro agradecimiento a Albert Compta y a los estudiantes de ambos cursos por señalarnos los errores detectados.

Asimismo queremos agradecer a Marilina Carena por donarnos su inestimable tiempo en la realización de los excelentes gráficos que aparecen en el libro.

Finalmente el segundo autor quiere dedicar este texto a Liliana Forzani, Osvaldo Gorosito y Ricardo Toledano colegas y amigos entrañables que lo soportan y sostienen en todo momento.

J. Ortega Cerdà, R. Scotto

Índice general